共単調加法的非線形汎関数の非加法的測度による積分表示 (バナッハ空間論の研究とその周辺)

河邊, 淳

数理解析研究所講究録
第 1753 巻 2011 年 96-100

共単調加法的非線形汎関数の非加法的測度による積分表示

信州大学・工学部　河邊　淳* (Jun Kawabe)
Faculty of Engineering, Shinshu University

概要. 共単調加法的汎関数の Daniell-Stone 型積分表示定理として有名な Greco の定理 (G.H. Greco, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 66, 21–42, 1982) から, Riesz 型積分表示定理を導く汎用的な手法を紹介し, それを用いて, 菅野らの積分表示定理 (M. Sugeno et al., Fuzzy Sets and Systems, 99, 205–211, 1998) の改良を与える.

1. はじめに

X を局所コンパクト空間とし, コンパクトな台をもつ X 上の非負実数値連続関数全体を C_{00}^{+} で表す. 菅野 [6] らは, 空間 X の局所コンパクト性を用いた直接的な手法で, 単調で正斉次的な共単調加法的汎関数 $I : C_{00}^{+} \to [0, \infty)$ が, 外正則な非加法的測度 $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ に関する Choquet 積分 [2] で表現できることを示した. 彼らの結果は, 非加法的測度による積算概念として重要な Choquet 積分の特徴付け (Riesz 型積分表示) を与えており, 空間 X が必ずしも局所コンパクトでない場合や, 汎関数の定義空間が C_{00}^{+} 以外の場合にも, その成立性を吟味することは, 非加法的測度論における重要な課題の一つである. この論文では, Greco 定理 [4] (Daniell-Stone 型積分表示定理) から Riesz 型積分表示定理を導く汎用的な手法を紹介し, それを用いて, 菅野らの積分表示定理の改良を与える.

2. 記号と準備

以下では, $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$, $\overline{\mathbb{R}}^+ := [0, \infty]$ とする. また, X は空でない集合とし, X の部分集合全体からなる集合族を 2^X で, 集合 $A \subset X$ の定義関数を χ_A で表す.

定義 1. 集合関数 $\mu : 2^X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ は, (i) $\mu(\emptyset) = 0$, (ii) $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ を満たすとき, X 上の非加法的測度という.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 28C05; Secondary 28A12, 28C15, 28E10.
Key words and phrases. nonadditive measure, comonotonic additivity, Choquet integral, Riesz type integral representation theorem.
*Research supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 20540163, Japan Society for the Promotion of Sciences (JSPS).

定義 2. μ は X 上の非加法的測度とする．関数 $f: X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ の μ に関する Choquet 積分を，Lebesgue 積分を用いて

$$(\mathrm{C})\int_X f d\mu := \int_0^\infty \mu(\{f > t\})dt = \int_0^\infty \mu(\{f \geq t\})dt$$

で定義する．

関数 $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ は，任意の $x, x' \in X$ に対して，$f(x) < f(x')$ ならば $g(x) \leq g(x')$ が成り立つとき，共単調であるといい，$f \sim g$ で表す．Greco は 1982 年の論文 [4] で，共単調関数に対して加法的な汎関数に関する Daniell-Stone 型の積分表示定理を与えた．

Greco 定理. 関数 $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ からなる空でない関数族 $\mathcal{F}$ が

(i) $0 \in \mathcal{F}$

(ii) $f \geq 0$ for $\forall f \in \mathcal{F}$ (非負性)

(iii) $f \in \mathcal{F}$, $c \in \mathbb{R}^+$ ならば cf, $f \wedge c$, $f - f \wedge c = (f-c)^+ \in \mathcal{F}$ (Stone の条件)

を満たすとする．また，汎関数 $I: \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ は

(iv) $I(0) = 0$

(v) $f, g \in \mathcal{F}$ で $f \leq g$ ならば $I(f) \leq I(g)$ (単調性)

(vi) $f, g \in \mathcal{F}$, $f + g \in \mathcal{F}$ かつ $f \sim g$ ならば $I(f+g) = I(f) + I(g)$ (共単調加法性)

(vii) $\forall f \in \mathcal{F}$ に対して $\lim_{a \to +0} I(f - f \wedge a) = I(f)$

(viii) $\forall f \in \mathcal{F}$ に対して $\lim_{b \to \infty} I(f \wedge b) = I(f)$

を満たすとする．各 $A \subset X$ に対して

$$\alpha(A) := \sup\{I(f) : f \in \mathcal{F},\ f \leq \chi_A\}$$
$$\beta(A) := \inf\{I(f) : f \in \mathcal{F},\ \chi_A \leq f\}$$

で集合関数 $\alpha, \beta: 2^X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ を定義する．ただし，$\inf \emptyset = \infty$ と約束する．

(1) α, β は X 上の非加法的測度で $\alpha \leq \beta$.

(2) X 上の非加法的測度 λ に対して，次の条件は同値:

(a) $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.

(b) 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $I(f) = (\mathrm{C})\int_X f d\lambda$.

注意 1. Greco 定理において，(v) と (vi) より，I の正斉次性，すなわち，任意の $f \in \mathcal{F}$ と $c \in \overline{\mathbb{R}}^+$ に対して $I(cf) = cI(f)$ が導ける ([4], [5] を見よ)．

3. 汎用的手法

次の定理は，Greco 定理から Riesz 型 Choquet 積分表示定理を導く汎用的手法を与える．

定理 1. Greco 定理と同じ記号を用いる.
(1) 関数族 $\mathcal{F}$ と汎関数 I が

(i) $\forall f \in \mathcal{F}, \exists g \in \mathcal{F}, \chi_{\{f>0\}} \leq g$ かつ $I(g) < \infty$

を満たせば，Greco 定理の (vii) が成立する.
(2) 関数族 $\mathcal{F}$ が

(ii) $\forall f \in \mathcal{F}$ に対して f は有界

を満たせば，Greco 定理の (viii) が成立する.

4. Riesz 型積分表示定理

以下，この章を通じて，X は局所コンパクト空間とし，コンパクトな台をもつ X 上の非負実数値連続関数全体を C_{00}^{+} で表す．また，$S(f)$ は関数 f の台，すなわち，集合 $\{f \neq 0\}$ の X における閉包とする.

まず初めに，菅野らの積分表示定理 [6] を，この論文で使用している用語，記号を用いて紹介する.

定理 2. 汎関数 $I: C_{00}^{+} \to \mathbb{R}$ は

(i) $f, g \in C_{00}^{+}$ で $f \leq g$ ならば $I(f) \leq I(g)$
(ii) $f, g \in C_{00}^{+}$ で $f \sim g$ ならば $I(f+g) = I(f) + I(g)$
(iii) $f \in C_{00}^{+}$ で $c \in \mathbb{R}^{+}$ ならば $I(cf) = cI(f)$

を満たすとする．各 $A \subset X$ に対して

$$\gamma(A) := \sup\{I(f) : f \in C_{00}^{+}, 0 \leq f \leq 1, S(f) \subset A\}$$
$$\gamma^{*}(A) := \inf\{\gamma(G) : A \subset G, G \text{ は開集合}\}$$

で集合関数 $\gamma, \gamma^{*}: 2^{X} \to \overline{\mathbb{R}}^{+}$ を定義する．ただし，$\inf \emptyset = \infty$ と約束する.
(1) 集合関数 γ, γ^{*} は X 上の非加法的測度.
(2) 任意のコンパクト集合 K に対して $\gamma^{*}(K) < \infty$.
(3) 任意の開集合 G に対して $\gamma^{*}(G) = \sup\{\gamma^{*}(K) : K \subset G, K \text{ はコンパクト}\}$.
(4) 任意の集合 A に対して $\gamma^{*}(A) = \inf\{\gamma^{*}(G) : A \subset G, G \text{ は開集合}\}$.
(5) 任意の $f \in C_{00}^{+}$ に対して $I(f) = (\mathrm{C})\int_X f d\gamma = (\mathrm{C})\int_X f d\gamma^{*}$.

注意 2. (1) 原論文 [6] では，γ は X の開集合全体上で，γ^{*} は X のボレル集合からなる σ-集合体上で定義されているが，実際には，定理 2 のように，それらの定義域を 2^{X} 上に拡大できる.

(2) 注意 1 で述べたように，定理 2 の (iii) は，(i) と (ii) より自動的に導かれる.

Greco 定理と定理 1 より，定理 2 の改良を与えることができる.

定理 3. 汎関数 $I: C_{00}^{+} \to \mathbb{R}$ は

(i) $f, g \in C_{00}^{+}$ で $f \leq g$ ならば $I(f) \leq I(g)$

(ii) $f, g \in C_{00}^+$ で $f \sim g$ ならば $I(f+g) = I(f) + I(g)$

を満たすとする．各 $A \subset X$ に対して

$$\alpha(A) := \sup\{I(f) : f \in C_{00}^+, f \leq \chi_A\}$$
$$\beta(A) := \inf\{I(f) : f \in C_{00}^+, \chi_A \leq f\}$$
$$\gamma(A) := \sup\{I(f) : f \in C_{00}^+, 0 \leq f \leq 1, S(f) \subset A\}$$
$$\alpha^*(A) := \inf\{\alpha(G) : A \subset G, G \text{ は開集合 }\}$$
$$\beta^*(A) := \sup\{\beta(K) : K \subset A, K \text{ はコンパクト }\}$$
$$\gamma^*(A) := \inf\{\gamma(G) : A \subset G, G \text{ は開集合 }\}$$

で集合関数 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^* : 2^X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ を定義する．ただし，$\inf \emptyset = \infty$ と約束する．

(1) 集合関数 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ は X 上の非加法的測度.

(2) X 上の非加法的測度 λ に対して，次の条件は同値:

(a) $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.

(b) 任意の $f \in C_{00}^+$ に対して $I(f) = (\mathrm{C})\int_X f d\lambda$.

(3) 任意のコンパクト集合 K に対して $\gamma^*(K) = \beta(K) = \beta^*(K) < \infty$.

(4) 任意の開集合 G に対して $\gamma^*(G) = \sup\{\gamma^*(K) : K \subset G, K \text{ はコンパクト }\}$.

(5) 任意の集合 A に対して $\gamma^*(A) = \inf\{\gamma^*(G) : A \subset G, G \text{ は開集合 }\}$.

(6) 任意の集合 A に対して $\beta^*(A) = \sup\{\beta^*(K) : K \subset A, K \text{ はコンパクト }\}$.

(7) 任意のコンパクト集合 K に対して $\beta^*(K) = \inf\{\beta^*(G) : K \subset G, G \text{ は開集合 }\}$.

(8) 任意の開集合 G に対して $\beta^*(G) = \gamma(G) = \gamma^*(G)$.

(9) $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ は比較可能，すなわち，$\alpha = \gamma \leq \beta^* \leq \alpha^* = \gamma^* \leq \beta$. それゆえ，これらはすべて I の表現測度となる.

注意 3. 菅野らが [6] で構成した非加法的測度は γ^* である.

5. おわりに

この論文では，Greco 定理と定理 1 を用いて，菅野らの Riesz 型積分表示定理の改良と，その別証明を与えた．実際には，われわれの汎用的な手法を用いれば，様々な関数空間や数列空間上の共単調加法的な汎関数に対する Riesz 型積分表示定理が得られる.

参考文献

[1] S.K. Berberian, Measure and Integration, Macmillan, New York, 1965

[2] G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier Grenoble 5 (1953–54) 131–295.

[3] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, second ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[4] G.H. Greco, Sulla rappresentazione di funzionali mediante integrali, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 66 (1982) 21–42.

[5] Y. Narukawa, T. Murofushi, M. Sugeno, Regular fuzzy measure and representation of comonotonically additive functional, Fuzzy Sets and Systems 112 (2000) 177–186.

[6] M. Sugeno, Y. Narukawa, T. Murofushi, Choquet integral and fuzzy measures on locally compact space, Fuzzy Sets and Systems 99 (1998) 205–211.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF ENGINEERING
SHINSHU UNIVERSITY
4-17-1 WAKASATO, NAGANO 380-8553, JAPAN
E-mail address: jkawabe@shinshu-u.ac.jp